Diseños de parcela dividida

Claudio Bustos

07 de Diciembre de 2011

Índice

1. Introducción

En el estudio del efecto de múltiples variables sobre una respuesta determinada, utilizando un diseño factorial aleatorizado ya sea completo o incompleto, es necesario que el orden de las corridas del experimento sea fijado completamente al azar, lo que implica definir las condiciones de la unidad experimental en cada corrida. En ciertos casos, ya sea por motivos de tiempo, materiales o costo, esto no es posible, siendo recomendable utilizar el diseño denominado de parcela dividida (*split-plot* en inglés).

El diseño de parcela dividida tiene su origen en la agricultura. La primera mención en la literatura sobre este tipo de la realiza Fisher (1925), quien describe un experimento destinado a conocer el efecto del tipo de patata en la producción de un campo. Se probaron 12 tipos de patatas en un campo dividido en 36 partes, siendo asignado cada tipo de tubérculo al azar a 3 partes distintas. Como se deseaba observar también el efecto de 3 tipos de fertilizante, cada una de los 36 secciones se dividió en tres subsecciones, asignándose al azar el fertilizante a cada una. Montgomery (2001) señala que cada una de las secciones mayores, a las cuales se les asigna el primer factor o tratamiento principal o de parcela completa, toma el nombre de *parcela completa*, en tanto que las secciones menores, a las cuales se les asigna el segundo factor o tratamiento de subparcela, son denominadas *subparcelas o parcelas divididas*.

Cochran y Cox (1957) señalan que la aplicación de este diseño a entornos industriales es muy común y, tal como señalan Jones y Nachtsheim(2009), es usual que muchos experimentadores realizan un diseño de parcela dividida analizándolos erróneamente como si fueran diseños completamente aleatorizados. Entre las posibles razones que dificultad o impiden fijar un orden aleatorio en las corridas se encuentran:

- Una serie de tratamientos requiera una gran cantidad de material experimental, en tanto que otros requieran cantidades mucho menores. Por ejemplo, si se quiere probar el efecto de distintos tipos de cocinado en un tipo de carne, el fritado requiere de cantidades grandes de aceite, por lo que sería un gran desperdicio de recurso botar en cada tirada experimental el aceite. En cambio, la aplicación de aderezos se puede realizar sin mayor problema en pequeños trozos de comida.
- Se requiere mucho tiempo o esfuerzo para fijar las condiciones para ciertos tratamientos, en tanto otras requieren muy poco esfuerzo. Por ejemplo, si deseamos identificar el efecto de la carga de un vehículo y su velocidad en el consumo de combustible, claramente es mucho más difícil sacar y poner cargas del orden de toneladas dentro del vehículo que modificar su velocidad.

Kowalski, Parker y Geoffrey(2007) señalan que se pueden utilizar diversos tipos de diseño experimental asociadas al diseño de parcelas divididas. Los más comunes en ambientes industriales serían el diseño completamente aleatorizado (DCA) y el diseño de bloques completamente aleatorizados (DBCA). En el caso de DCA cada uno de los a niveles del tratamientos principal es replicado r veces y el orden de cada una de las ar corridas es aleatorio. En el caso del DBCA, dentro de cada uno de los r bloques se aplica en orden aleatorio cada una de las corridas de los a niveles del tratamiento principal. El orden del tratamiento de subparcela dentro cada corrida del tratamiento principal se realiza siempre al azar.

Es interesante notar que cada parcela puede ser considerada como un bloque, compuesto de un número de unidades igual al número de tratamientos de subparcela. Las diferencias entre los bloques se confunden con las diferencias de los niveles del factor principal (Cochran y Cox, 1957).

2. Modelo estadístico

El modelo lineal más sencillo de un diseño de parcelas divididas lo entrega Jones y Nachtsheim (2009), el cual corresponde a un DCA apropiado para diseños balanceados y fraccionales. Este considera la existencia de a niveles para el factor A - de parcela completa -, b niveles para el factor B - de subparcela -, donde cada factor A es aplicado a c parcelas completas, por lo que el efecto de cada parcela esta anidado dentro del factor A. Así, la respuesta Y_{kij}, correspondiente al nivel i del factor A, j del factor B en la replicación k será.

$$Y_{kij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \gamma_{k(i)} + \epsilon_{kij} \tag{1}$$

Donde

μ Media de respuesta

α_i Efecto del tratamiento de parcela completa en el nivel i

β_j Efecto del tratamiento de subparcela en el nivel j

$(\alpha\beta)_{ij}$ el efecto de interacción para los niveles i y j de los factores A y B, respectivamente

$\gamma_{k(i)}$ Error de parcela completa k dentro del factor i, independientes entre parcelas con distribución $N(0, \sigma_w^2)$

ϵ_{kij} Errores de subparcela, independientes con distribución $N(0, \sigma^2)$

Con las condiciones usuales para un modelo mixto no restringido

$$\sum_{i=1}^{a} \alpha_i = 0$$
$$\sum_{j=1}^{b} \beta_j = 0$$
$$\sum_{i=1}^{a} (\alpha\beta)_{ij} = 0, j = 1, 2, ..., b$$
$$\sum_{j=1}^{b} (\alpha\beta)_{ij} = 0, i = 1, 2, ..., a$$
$$cov(\gamma_{k(i)}, \gamma_{k'(i')}) = 0, \forall (i,k) \neq (i^{'}, k^{'})$$
$$cov(\epsilon_{ijk}, \gamma_{lmn}) = 0, \forall (i,j,k) \neq (l,m,n)$$

Si las replicaciones se realizan de acuerdo a un DBCA, las c replicaciones corresponderán a igual número de bloques. La respuesta Y_{kij}, correspondiente al nivel i del factor A, j del factor B en el bloque k será.

$$Y_{kj} = \mu + \tau_k + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \gamma_{k(i)} + \epsilon_{kij} \tag{2}$$

Donde τ_k corresponde al efecto aleatorio del bloque k, distribuido $N(0, \sigma_\tau^2)$. Para que las esperanzas de cuadrados medios sean las mismas que en el DCA, se debe usar un modelo mixto restringido. Este cuenta con las mismas condiciones que las que se presentaron para el modelo en (1), con los siguientes cambios

- La distribucion de $\gamma_{k(i)}$ se hace $N(0, \frac{a-1}{a}\sigma_w^2)$
- La suma de $\gamma_{k(i)}$ dentro de un mismo nivel de factor de A es igual a 0, es decir $\sum_{i=1}^{a} \gamma_{k(i)} = 0$.

Montgomery(2001) presenta un modelo más general, que considera la interacción entre el efecto del bloque y el tratamiento de subparcela, así como un coeficiente para la interacción de tercer orden entre los dos factores y el bloque.

2.1. Estimación de parámetros de efecto fijo, usando mínimos cuadrados

Jones y Nachtsheim(2009) señalan que en el caso balanceado, la estimación de los efectos fijos es realizada usando mínimos cuadrados ordinadorios y las varianzas de los efectos aleatorios a través de un análisis de la tabla de ANOVA.

Considerando el caso para el DBCA, podemos generar una variable $\tilde{\epsilon}$:

$$\tilde{\epsilon}_{kij} = \epsilon_{kij} + \gamma_{(k)i} + \tau_k$$
$$\tilde{\epsilon}_{kij} \sim N(0, \tilde{\sigma^2})$$

Podemos encontrar los estimadores para los factores de efecto fijo que minimicen la expresión

$$\min_{\alpha,\beta,\gamma,(\alpha\beta)} \sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} \tilde{\epsilon}_{kij}^2 = \sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} (Y_{kij} - \mu - \alpha_i - \beta_j - (\alpha\beta)_{ij})^2$$

Donde Y_{kij} es la respuesta en el bloque (o repetición) k del i-ésimo nivel del factor A y el j-ésimo nivel del factor B

Para encontrar los estimadores, se deben derivar la expresión por el vector de parámetros y resolver las ecuaciones simultáneas del tipo

$$\frac{\partial \epsilon^2}{\partial \theta} = 0$$

Los estimadores para μ, α, β y $(\alpha\beta)$se pueden calcular con relativa facilidad, por las condiciones definidas para el modelo

Diferenciado para μ e igualando a cero tenemos

$$\sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} -2(Y_{kij} - \hat{\mu} - \hat{\alpha}_i - \hat{\beta}_j - (\hat{\alpha\beta})_{ij}) = 0$$

$$-2[\sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} Y_{kij} - rab\hat{\mu} - rb\sum_{i=1}^{a}\hat{\alpha}_i - ra\sum_{j=1}^{b}\hat{\beta}_j - r\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\hat{\alpha\beta})_{ij}] = 0$$

Que por las condiciones impuestas a los parámetros se simplifica en:

$$-2(\sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} Y_{kij} - rab\hat{\mu}) = 0$$

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} Y_{jik}}{rab} = \bar{Y}_{\cdots}$$

De forma similar encontramos los estimadores para α_i, β_j y $(\alpha\beta)_{ij}$

$$\frac{\partial \epsilon^2}{\partial \alpha_i} = \sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{b} -2(Y_{kij} - \hat{\mu} - \hat{\alpha}_i - \hat{\beta}_j - (\hat{\alpha\beta})_{ij}) = 0$$

$$-2[\sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{b} Y_{kij} - rb\hat{\mu} - rb\hat{\alpha}_i - r\sum_{j=1}^{b}\hat{\beta}_j - r\sum_{j=1}^{b}(\hat{\alpha\beta})_{ij}] = 0$$

$$-2(\sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{b} Y_{kij} - rb\hat{\mu} - rb\hat{\alpha}_i) = 0$$

$$\hat{\alpha}_i = \frac{\sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{b} Y_{kij}}{rb} - \hat{\mu} = \bar{Y}_{\cdot i \cdot} - \bar{Y}_{\cdot\cdot\cdot}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \epsilon^2}{\partial \beta_j} &= \sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{a} -2(Y_{kij} - \hat{\mu} - \hat{\alpha}_i - \hat{\beta}_j - (\hat{\alpha\beta})_{ij}) = 0 \\
-2[\sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{a} Y_{kij} - ra\hat{\mu} - r\sum_{i=1}^{a}\hat{\alpha}_i - ra\hat{\beta}_j - r\sum_{i=1}^{a}(\hat{\alpha\beta})_{ij}] &= 0 \\
-2(\sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{a} Y_{kij} - ra\hat{\mu} - ra\hat{\beta}_j) &= 0
\end{aligned}$$

$$\hat{\beta}_j = \frac{\sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{a} Y_{kij}}{ra} - \hat{\mu} = \bar{Y}_{\cdot\cdot j} - \bar{Y}_{\cdot\cdot\cdot}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \epsilon^2}{\partial (\alpha\beta)_{ij}} &= \sum_{k=1}^{r} -2(Y_{kij} - \hat{\mu} - \hat{\alpha}_i - \hat{\beta}_j - (\hat{\alpha\beta})_{ij}) = 0 \\
-2(\sum_{k=1}^{r} Y_{kij} - r\hat{\mu} - r\hat{\alpha}_i - r\hat{\beta}_j - r(\hat{\alpha\beta})_{ij}) &= 0
\end{aligned}$$

8

$$\begin{aligned}
(\hat{\alpha\beta})_{ij} &= \frac{\sum_{k=1}^{r} Y_{kij}}{r} - \hat{\mu} - \hat{\alpha}_i - \hat{\beta}_j \\
&= \bar{Y}_{\cdot ij} - \bar{Y}_{\cdot\cdot\cdot} - (\bar{Y}_{\cdot i \cdot} - \bar{Y}_{\cdot\cdot\cdot}) - (\bar{Y}_{\cdot\cdot j} - \bar{Y}_{\cdot\cdot\cdot}) \\
&= \bar{Y}_{\cdot ij} - \bar{Y}_{\cdot i \cdot} - \bar{Y}_{\cdot\cdot j} + \bar{Y}_{\cdot\cdot\cdot}
\end{aligned}$$

2.2. Estimación de parámetros de efecto aleatorio, usando método de análisis de varianza

Para obtener una estimación de σ^2 y σ_w^2 usando el método de análisis de la varianza, debemos calcular los cuadrados medios para los distintos efectos y, a partir de sus esperanzas, reconocer cual sería el estimador apropiado para las varianzas.

Se muestran a continuación las sumas de cuadrados para el DBCA, tanto en su versión basada en las medias como en sumas por factor (Montgomery, 2001)

$$
\begin{aligned}
SC_A &= \sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\bar{Y}_{\cdot i\cdot} - \bar{Y}_{\cdots})^2 \\
&= br\sum_{i=1}^{a}(\bar{Y}_{\cdot i\cdot} - \bar{Y}_{\cdots})^2 \\
&= br\sum_{i=1}^{a}(\frac{Y_{\cdot i\cdot}^2}{b^2r^2} - 2\frac{Y_{\cdot i\cdot}Y_{\cdots}}{a(br)^2} + \frac{Y_{\cdots}^2}{(abr)^2}) \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{a} Y_{\cdot i\cdot}^2}{br} - \frac{Y_{\cdots}^2}{abr} \\
SC_B &= \sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\bar{Y}_{\cdot\cdot j} - \bar{Y}_{\cdots})^2 \\
&= \frac{\sum_{j=1}^{b} Y_{\cdot\cdot j}^2}{ar} - \frac{Y_{\cdots}^2}{abr} \\
SC_{AB} &= \sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\bar{Y}_{\cdot ij} - \bar{Y}_{\cdot i\cdot} - \bar{Y}_{\cdot\cdot j} + \bar{Y}_{\cdots})^2 \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} Y_{\cdot ij}^2}{r} - \frac{Y_{\cdots}^2}{abr} - SC_A - SC_B \\
SC_{BLOQUE} &= \sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\bar{Y}_{k\cdot\cdot} - \bar{Y}_{\cdots})^2 \\
&= \frac{\sum_{k=1}^{r} Y_{k\cdot\cdot}^2}{ab} - \frac{Y_{\cdots}^2}{abr} \\
SC_{EP} &= \sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\bar{Y}_{ki\cdot} - \bar{Y}_{\cdot i\cdot} - \bar{Y}_{k\cdot\cdot} + \bar{Y}_{\cdots})^2 \\
&= \frac{\sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{a} Y_{ki\cdot}^2}{b} - \frac{Y_{\cdots}^2}{abr} - SC_A - SC_{BLOQUE} \\
SC_E &= \sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(Y_{kij} - \bar{Y}_{\cdot ij} - \bar{Y}_{ki\cdot} + \bar{Y}_{\cdot i\cdot})^2 \\
&= SC_E = \sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} Y_{kij}^2 - \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} Y_{\cdot ij}^2 - \frac{1}{b}\sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{r} Y_{ki\cdot}^2 + \frac{1}{br}\sum_{i=1}^{a} Y_{\cdot i\cdot}^2
\end{aligned}
$$

Las esperanzas de los cuadrados medios del DBCA, utilizando un **modelo**

mixto restringido, son

$$
\begin{aligned}
E(CM_{BLOQUE}) &= \frac{ESC_{BLOQUE}}{(r-1)} && = \sigma^2 + ab\sigma_\tau^2 \\
E(CM_A) &= \frac{SC_A}{a-1} && = \sigma^2 + b\sigma_w^2 + br\frac{\sum \alpha_j^2}{a-1} \\
E(CM_{EP}) &= \frac{ESC_{EP}}{(r-1)(a-1)} && = \sigma^2 + b\sigma_w^2 \\
E(CM_B) &= \frac{ESC_B}{b-1} && = \sigma^2 + ar\frac{\sum \beta_j^2}{b-1} \\
E(CM_{AB}) &= \frac{ESC_{AB}}{(a-1)(b-1)} && = \sigma^2 + r\frac{\sum (\alpha\beta)_{ij}^2}{(a-1)(b-1)} \\
E(CM_E) &= \frac{ESC_E}{a(b-1)(r-1)} && = \sigma^2
\end{aligned}
$$

Claramente, $\hat{\sigma^2} = CM_E$ es un estimador insesgado de σ^2 y considerando que:

$$
\begin{aligned}
E[CM_{EP}] - E[CM_E] &= b\sigma_w^2 \\
\hat{\sigma_w^2} &= \frac{CM_{EP} - CM_E}{b}
\end{aligned}
$$

$\hat{\sigma_w^2}$ es un estimador insesgado de σ_w^2.

En el caso del DCA, se obtienen las mismas esperanzas de medias cuadradas si se utiliza un **modelo mixto no restringido**. SC_{EP} y CM_{EP} adoptan las expresiones

$$
\begin{aligned}
SC_{EP.DCA} &= \sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\bar{Y}_{ki\cdot} - \bar{Y}_{\cdot i\cdot})^2 \\
&= \frac{\sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{a} Y_{ki\cdot}^2}{b} - \frac{\sum_{i=1}^{a} Y_{\cdot i\cdot}^2}{bc}
\end{aligned}
$$

$$
CM_{EP.DCA} = \frac{SC_{EP.DCA}}{a(r-1)} \tag{3}
$$

Los cálculos realizados para obtener las esperanzas de los cuadrados medios se encuentran en el apéndice B para el DBCA y en el apéndice A para el DCA.

3. Análisis de varianza

El análisis de la varianza para un diseño de parcela dividida suele presentarse separando claramente el error atribuible al efecto del tratamiento de parcela completa del efecto del tratamiento de subparcela.

Para el DCA, con a niveles del factor parcela completa, b niveles del factor de subparcela y r repeticiones, la tabla ANOVA sería la siguiente

Fuente de variación	grados de libertad	E[CM]
Factor parcela completa	$a-1$	$\sigma^2 + b\sigma_w^2 + br\frac{\sum \alpha_j^2}{a-1}$
Error parcela completa	$a(r-1)$	$\sigma^2 + b\sigma_w^2$
Factor subparcela	$b-1$	$\sigma^2 + ar\frac{\sum \beta_j^2}{b-1}$
Interacción factor parcela X subparcela	$(a-1)(b-1)$	$\sigma^2 + r\frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\alpha\beta)_{ij}^2}{(a-1)(b-1)}$
Error subparcela	$a(r-1)(b-1)$	σ^2

En el caso del DBCA, con a niveles del factor parcela completa, b niveles del factor de subparcela y r bloques , la tabla ANOVA sería la siguiente

Fuente de variación	grados de libertad	E[CM]
Bloques	$r-1$	$\sigma^2 + ab\sigma_\tau^2$
Factor parcela completa	$a-1$	$\sigma^2 + b\sigma_w^2 + br\frac{\sum \alpha_j^2}{a-1}$
Error parcela completa	$(a-1)(r-1)$	$\sigma^2 + b\sigma_w^2$
Factor subparcela	$b-1$	$\sigma^2 + ar\frac{\sum \beta_j^2}{b-1}$
Interacción factor parcela X subparcela	$(a-1)(b-1)$	$\sigma^2 + r\frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\alpha\beta)_{ij}^2}{(a-1)(b-1)}$
Error subparcela	$a(r-1)(b-1)$	σ^2

Observando los cuadrados medios esperados, se pueden crear un test F para el efecto del tratamiento de parcela completa comparando usando el CM_A y CM_{EP}, en tanto que los test F para el efecto de la subparcela y la presencia de interacción entre los tratamientos se realizan comparando CM_B y CM_{AB} contra CM_E. De este modo:

$$F_A = \frac{CM_A(r-1)(a-1)}{CM_{EP}(a-1)} \sim F(a-1,(r-1)(a-1))$$
$$F_B = \frac{CM_B b(r-1)(a-1)}{CM_E(b-1)} \sim F(b-1, b(r-1)(a-1))$$
$$F_{AB} = \frac{CM_{AB} b(r-1)(a-1)}{CM_E(a-1)(b-1)} \sim F((a-1)(b-1), b(r-1)(a-1))$$

Para el DCA, sólo se debe reemplazar la formula de F_A para utilizar los cuadrados medios y los grados de libertad presentes en (3)

4. Análisis del modelo para el caso general

Para los casos no balanceados, el método de estimación basado en mínimos cuadrados para los efectos fijos y el análisis del ANOVA para los efectos aleatorios es inadecuado. Jones y Nachtsheim(2009) recomiendan el uso de la estimación por máxima verosimilitud restringida.

Sea z_i un vector indicador cuyo k-ésimo elemento es 1 cuando la corrida i-esima fue asignada a la parcela k y en 0 otro caso. La matriz de varianza-covarianza de la respuesta se puede representar como

$$\mathbf{V} = \sigma^2 \mathbf{I_n} + \sigma_w^2 \mathbf{Z}\mathbf{Z^t} \tag{4}$$

con $n = abr$ y $\mathbf{Z}$ una matriz nxb con la fila i igual al z_i. Para un $\mathbf{V}$ conocido, el mejor estimado insesgado para el vector de parámetros de los efectos fijos es el de mínimos cuadrados generalizados

$$\hat{\beta}_{MCG} = (\mathbf{X}^T\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{V}^{-1}\mathbf{Y}$$

Como $\mathbf{V}$ suele ser desconocido, se substituye los parámetros σ^2 y σ_w^2 en (4) por sus estimadores para obtener la matriz de varianza-covarianza estimada $\hat{\mathbf{V}}$, resultando en el estimador plausible de mínimos cuadrados generalizados

$$\hat{\beta}_{PMCG} = (\mathbf{X}^T\hat{\mathbf{V}}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\hat{\mathbf{V}}^{-1}\mathbf{Y} \tag{5}$$

Para obtener los estimadores de σ^2 y σ_w^2, se maximiza la log verosimilitud parcial de los componentes de varianza

$$\begin{aligned} 2logL(\sigma^2, \sigma_w^2) &= const. - log|\mathbf{V}| - log|\mathbf{X}^T\hat{\mathbf{V}}^{-1}\mathbf{X}| \\ &\quad - \mathbf{Y}^{-1}[\hat{\mathbf{V}}^{-1} - \hat{\mathbf{V}}^{-1}\mathbf{X}(\mathbf{X}^T\hat{\mathbf{V}}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\hat{\mathbf{V}}^{-1}]\mathbf{Y} \end{aligned}$$

Los estimadores resultantes, $\hat{\sigma^2}$ y $\hat{\sigma_w^2}$ son usados en (5) para obtener los estimados PMCG de los efectos fijos.

5. Aplicación

5.1. Resistencia a la corrosión de barras de metal

Utilizaremos el ejemplo que provee Jones y Nachtsheim(2009) sobre una investigación que tenía por objetivo estudiar la resistencia a la corrosión de barras de metal tratatas con 4 recubrimientos (C_1,C_2,C_3 y C_4), y tres temperaturas de horno, 360ºC, 370ºC y 380ºC. La temperatura del horno es un factor difícil de cambiar, ya que toma bastante tiempo reiniciar la temperatura del horno y llegar a un nuevo equilibrio de temperatura. En cambio, asignar un recubrimiento a una barra es una factor fácil de alterar. El procedimiento consistió en calentar el horno a una temperatura específica y colocar las barras con los 4 recubrimientos al azar dentro del horno. Cada tratamiento de parcela completa (temperatura) fue replicado dos veces, por lo que se cuenta con 6 parcelas completas y cuatro subparcelas dentro de cada parcela

Este experimento cuenta con un diseño de parcela dividida con DCA para el efecto de parcela completa, ya que no existe un bloque dentro del cual se repliquen los tratamientos principales. En R se puede calcular directamente utilizando el comando `aov`

```
# Introducción de datos
parcela<-c(rep(1,4),rep(2,4),rep(3,4),rep(4,4),rep(5,4),rep(6,4))
repeticion<-c(rep(1,4),rep(1,4),rep(1,4),rep(2,4),rep(2,4),rep(2,4))
temperatura<-c(rep(360,4),rep(370,4),rep(380,4),rep(380,4),rep(370,4),rep(360,4))
cobertura<-c(2,3,1,4,1,3,4,2,3,1,2,4,4,3,2,1,4,1,3,2,1,4,2,3)
resistencia<-c(73,83,67,89,65,87,86,91,147,155,127,212,
   153,90,100,108,150,140,121,142,33,54,8,46)

df<-data.frame(parcela=factor(parcela),temperatura=factor(temperatura),
cobertura=factor(cobertura),resistencia=resistencia,repeticion=factor(repeticion))
# Nótese el uso del término de error en parcela
aov(resistencia~temperatura*cobertura+Error(parcela),data=df)
```

La salida es

```
Error: parcela
            Df Sum Sq Mean Sq F value Pr(>F)
temperatura  2  26519 13259.6  2.7548 0.2093
Residuals    3  14440  4813.2

Error: Within
                      Df Sum Sq Mean Sq F value   Pr(>F)
cobertura              3 4289.1 1429.71 11.4798 0.001977 **
temperatura:cobertura  6 3269.7  544.96  4.3757 0.024066 *
Residuals              9 1120.9  124.54
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
```

Que coincide con los resultados de Jones y Nachtsheim(2009). En este caso en particular, podemos observar que el tipo de cobertura tiene influencia en la resistencia a la corrosión, y que la resistencia varía de acuerdo también a la combinación entre temperatura y la cobertura aplicada.

Resulta instructivo realizar un análisis de varianza considerando, incorrectamente, un DCA. Usando el comando

```
e1.anova.2<-aov(resistencia~temperatura*cobertura,data=df)
```

Obtenemos la salida

```
Analysis of Variance Table

Response: resistencia
                      Df  Sum Sq Mean Sq F value   Pr(>F)
temperatura            2 26519.2 13259.6 10.2256 0.002557 **
cobertura              3  4289.1  1429.7  1.1026 0.386016
temperatura:cobertura  6  3269.7   545.0  0.4203 0.851799
Residuals             12 15560.5  1296.7
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
```

Estos resultados indicarían que la temperatura es el único factor que afecta a la resistencia a la corrosión, una conclusión completamente distinta a la que obtenemos al considerar el diseño del experimento en el análisis.

5.2. Preparación de tortas

Box y Jones(1992) presentan datos simulados para un estudio que busca determinar la mejor receta para vender en caja en un supermercado. Existe 8 recetas, que difieren en el tipo de harina(F), mantequilla (S) y huevo en polvo(E), las cuales se prueban en un diseño factorial 2^3. Además, se desea verificar el efecto de cocer a distintas temperaturas y tiempo, correspondiendo a un diseño 2^2. Por tanto, el diseño final contituye un diseño factorial 2^5. La respuesta está constituida por el promedio de respuesta hedonóstica de un panel que prueba cada receta, usando una escala de 1 a 7

Box y Jones proponen un diseño de experimento en el cual se horneen las 8 recetas en cada una de las 4 combinaciones de tiempo y temperatura. En un csv llamado `torta.csv` con la siguiente estructura

```
receta horneada F S E temperatura tiempo Y
1 1 -1 -1 -1 -1 -1 1,3
1 2 -1 -1 -1 1 -1 1,6
1 3 -1 -1 -1 -1 1 1,2
1 4 -1 -1 -1 1 1 3,1
2 1 1 -1 -1 -1 -1 2,2
2 2 1 -1 -1 1 -1 5,5
2 3 1 -1 -1 -1 1 3,2
2 4 1 -1 -1 1 1 6,5
3 1 -1 1 -1 -1 -1 1,3
3 2 -1 1 -1 1 -1 1,2
3 3 -1 1 -1 -1 1 1,5
3 4 -1 1 -1 1 1 1,7
4 1 1 1 -1 -1 -1 3,7
4 2 1 1 -1 1 -1 3,5
4 3 1 1 -1 -1 1 3,8
4 4 1 1 -1 1 1 4,2
5 1 -1 -1 1 -1 -1 1,6
5 2 -1 -1 1 1 -1 3,5
5 3 -1 -1 1 -1 1 2,3
5 4 -1 -1 1 1 1 4,4
6 1 1 -1 1 -1 -1 4,1
6 2 1 -1 1 1 -1 6,1
6 3 1 -1 1 -1 1 4,9
6 4 1 -1 1 1 1 6,3
7 1 -1 1 1 -1 -1 1,9
7 2 -1 1 1 1 -1 2,4
7 3 -1 1 1 -1 1 2,6
```

```
7 4 -1 1 1 1 1 2,2
8 1 1 1 1 -1 -1 5,2
8 2 1 1 1 1 -1 5,8
8 3 1 1 1 -1 1 5,5
8 4 1 1 1 1 1 6
```

Se realiza el siguiente análisis

```
d2<-read.csv("torta.csv",header=T,dec=",")
d2$receta<-factor(d2$receta)
d2$horneada<-factor(d2$horneada)
d2$F<-factor(d2$F)
d2$S<-factor(d2$S)
d2$E<-factor(d2$E)
d2$temperatura<-factor(d2$temperatura)
d2$tiempo<-factor(d2$tiempo)
aov(Y~tiempo*temperatura*F*S*E+Error(horneada),data=d2)
```

Obteniéndose la siguiente salida

```
Error: horneada
                   Df Sum Sq Mean Sq
tiempo              1 2.2578  2.2578
temperatura         1 9.7903  9.7903
tiempo:temperatura  1 0.0378  0.0378

Error: Within
                         Df Sum Sq Mean Sq
F                         1 56.978  56.978
S                         1  0.878   0.878
E                         1 11.640  11.640
tiempo:F                  1  0.000   0.000
temperatura:F             1  0.750   0.750
tiempo:S                  1  0.383   0.383
temperatura:S             1  6.753   6.753
F:S                       1  0.300   0.300
tiempo:E                  1  0.053   0.053
temperatura:E             1  0.008   0.008
F:E                       1  0.340   0.340
S:E                       1  0.138   0.138
tiempo:temperatura:F      1  0.053   0.053
tiempo:temperatura:S      1  0.053   0.053
tiempo:F:S                1  0.000   0.000
temperatura:F:S           1  0.228   0.228
tiempo:temperatura:E      1  0.475   0.475
tiempo:F:E                1  0.053   0.053
temperatura:F:E           1  0.525   0.525
```

```
tiempo:S:E                 1  0.003   0.003
temperatura:S:E            1  0.165   0.165
F:S:E                      1  0.633   0.633
tiempo:temperatura:F:S     1  0.383   0.383
tiempo:temperatura:F:E     1  0.053   0.053
tiempo:temperatura:S:E     1  0.000   0.000
tiempo:F:S:E               1  0.038   0.038
temperatura:F:S:E          1  1.088   1.088
tiempo:temperatura:F:S:E   1  0.003   0.003
```

De acuerdo a esto, no existirían diferencias significativas en la respuesta a los distintos tipos de ingredientes ni a las condiciones de cocción.

6. Referencias

- Box, G. y Jones, S. (1992).Split-Plot designs for robust experimentation. *Journal of Applied Statistics, 19* (1), 3-26.
- Cochran, W. y Cox, G. (1957). *Experimental Designs.* New York: Wiley.
- De Mendiburu, F. (2007). *Análisis estadístico con "R".* The R Foundation for Statistical Computing.
- Fisher, R.A. (1925). *Statistical Methods for Research Workers.* Descargado desde http://psychclassics.yorku.ca/Fisher/Methods
- Jones, B. y Nachtsheim, C.(2009). Split-plot designs: what, why, and how. *Journal of Quality Technology, 41* (4), 340-361.
- Kowalski, S., Parker, P. y Geoffrey, G. (2007). Tutorial: Industrial Split-plot Experiments. *Quality Engineering, 19*, 1-15.
- Montgomery, D. (2001). *Design and analysis of experiments.* New York: Wiley.

Appendices

A. Cálculo de esperanza de cuadrados medios de los efectos aleatorios y fijos para diseños de parcela dividida DCA

Utilizaremos el modelo no restringido para el cálculo. Consideremos las siguientes sumas de cuadrados como base, presentados en el texto

$$SC_A = \frac{\sum_{i=1}^{a} Y_{\cdot i \cdot}^2}{br} - \frac{Y_{\cdots}^2}{abr}$$
$$SC_B = \frac{\sum_{j=1}^{b} Y_{\cdot\cdot j}^2}{ar} - \frac{Y_{\cdots}^2}{abr}$$
$$SC_{AB} = \frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} Y_{\cdot ij}^2}{r} - \frac{Y_{\cdots}^2}{abr} - SC_A - SC_B$$
$$SC_{EP} = \frac{\sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{a} Y_{ki\cdot}^2}{b} - \frac{\sum_{i=1}^{a} Y_{\cdot i \cdot}^2}{bc}$$

Comencemos calculando $\frac{Y_{\cdots}^2}{abr}$, que se utiliza en la mayoría de las sumas de cuadrados

$$\begin{aligned}
E(Y...) &= E(\sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} Y_{ijk}) \\
&= \sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} E(Y_{ijk}) \\
&= \sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} \\
&= rab\mu + rb\sum_{i=1}^{a}\alpha_i + ra\sum_{j=1}^{b}\beta_j + c\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\alpha\beta)_{ij}
\end{aligned}$$

Por las condiciones del modelo, se eliminan las sumatorias de α_i, β_j y $(\alpha\beta)_i j$

$$E(Y...) = abr\mu$$

$$\begin{aligned}
V(Y...) &= V(\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{a} Y_{kij}) \\
&= V(\sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} \gamma_{k(i)} + \epsilon_{kij}) \\
&= V(b\sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{a}\gamma_{k(i)}) + \sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} V(\epsilon_{kij}) \\
&= ab^2r\sigma_w^2 + abr\sigma^2
\end{aligned}$$

El término $\frac{E(Y_{\cdots}^2)}{abr}$ quedaría

$$\begin{aligned}
\frac{E(Y_{\cdots}^2)}{abr} &= \frac{(abr\mu)^2 + ab^2r\sigma_w^2 + abr\sigma^2}{abr} \\
&= abr\mu^2 + b\sigma_w^2 + \sigma^2
\end{aligned}$$

A.1. Esperanza de cuadrado medio para Factor A DCA

$$
\begin{aligned}
E(Y_{\cdot i \cdot}) &= E(\sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{b} Y_{kij}) \\
&= \sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{b} E(Y_{kij}) \\
&= \sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{b} \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} \\
&= rb\mu + rb\alpha_i + r\sum_{j=1}^{b}\beta_j + r\sum_{j=1}^{b}(\alpha\beta)_{ij}
\end{aligned}
$$

Por las restricciones eliminamos β_j y $(\alpha\beta)_{ij}$

$$E(Y_{\cdot i \cdot}) = br(\mu + \alpha_i)$$

$$
\begin{aligned}
V(Y_{\cdot i \cdot}) &= V(\sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{b} Y_{ijk}) \\
&= V(\gamma_{k(i)} + \epsilon_{kij}) \\
&= V(b\sum_{k=1}^{r}\gamma_{k(i)} + \sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{b}\epsilon_{kij}) \\
&= b^2 r\sigma_w^2 + br\sigma^2
\end{aligned}
$$

La esperanza de $\frac{\sum_{i=1}^{a} Y_{\cdot i \cdot}^2}{br}$ sería

$$
\begin{aligned}
\frac{\sum_{i=1}^{a} E(Y_{\cdot i \cdot}^2)}{br} &= \frac{\sum_{i=1}^{a}[br(\mu+\alpha_i)^2] + b^2 r\sigma_w^2 + bc\sigma^2}{br} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{a}(br)^2\mu^2 + 2(br)^2\mu\alpha + (br)^2\alpha_i^2 + b^2 r\sigma_w^2 + br\sigma^2}{br} \\
&= abr\mu^2 + br\sum_{i=1}^{a}\alpha_i^2 + ab\sigma_w^2 + a\sigma^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(SC_A) &= E\left(\frac{\sum_{i=1}^{a} Y_{\cdot i \cdot}^2}{br} - \frac{Y_{\cdots}^2}{abr}\right) \\
&= abr\mu^2 + br\sum_{i=1}^{a}\alpha_i^2 + ab\sigma_w^2 + a\sigma^2 \\
&- abr\mu^2 - b\sigma_w^2 - \sigma^2 \\
&= br\sum_{i=1}^{a}\alpha_i^2 + (a-1)(b\sigma_w^2 + \sigma^2)
\end{aligned}
$$

Con esperanza de cuadrado medio

$$
\begin{aligned}
E(CM_A) &= \frac{br\sum_{i=1}^{a}\alpha_i^2 + (a-1)(b\sigma_w^2 + \sigma^2)}{a-1} \\
&= br\frac{\sum_{i=1}^{a}\alpha_i^2}{a-1} + b\sigma_w^2 + \sigma^2
\end{aligned}
$$

A.2. Esperanza del cuadrado medio del error de parcela completa DCA

$$
\begin{aligned}
E(Y_{ki\cdot}) &= E(\sum_{j=1}^{b} Y_{kij}) \\
&= \sum_{j=1}^{b} E(Y_{kij}) \\
&= \sum_{j=1}^{b} \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} \\
&= b\mu + b\alpha_i + \sum_{j=1}^{b}\beta_j + \sum_{j=1}^{b}(\alpha\beta)_{ij}
\end{aligned}
$$

Por condición del modelo eliminamos los términos β_j y $(\alpha\beta)_{ij}$

$$
E(Y_{ki\cdot}) = b(\mu + \alpha_i)
$$

$$
\begin{aligned}
V(Y_{ki\cdot}) &= V(\sum_{j=1}^{b} Y_{ijk}) \\
&= V(\gamma_{k(i)} + \epsilon_{kij}) \\
&= V(b\gamma_{k(i)} + \sum_{j=1}^{b}\epsilon_{kij}) \\
&= b^2\sigma_w^2 + b\sigma^2
\end{aligned}
$$

La esperanza de $\frac{1}{b}\sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{a} Y_{ki\cdot}^2$ es

$$
\begin{aligned}
E(\frac{1}{b}\sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{a} Y_{ki\cdot}^2) &= \frac{\sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{a} b^2(\mu+\alpha_i)^2 + b^2\sigma_w^2 + b\sigma^2}{b} \\
&= \sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{a} b(\mu+\alpha_i)^2 + b\sigma_w^2 + \sigma^2 \\
&= abr\mu^2 + br\sum_{i=1}^{a}\alpha_i^2 + abr\sigma_w^2 + ar\sigma^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(SC_{EP}) &= E\left(\frac{\sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{a} Y_{ki\cdot}^2}{b} - \frac{\sum_{i=1}^{a} Y_{\cdot i\cdot}^2}{bc}\right) \\
&= abr\mu^2 + br\sum_{i=1}^{a}\alpha_i^2 + abr\sigma_w^2 + ar\sigma^2 \\
&- abr\mu^2 + br\sum_{i=1}^{a}\alpha_i^2 + ab\sigma_w^2 + a\sigma^2 \\
&= a(r-1)(b\sigma_w^2 + \sigma^2(r-1))
\end{aligned}
$$

Con esperanza de cuadrado medio

$$
\begin{aligned}
E(CM_{EP}) &= \frac{1}{a(r-1)}a(r-1)(b\sigma_w^2 + \sigma^2(r-1)) \\
&= b\sigma_w^2 + \sigma^2
\end{aligned}
$$

A.3. Esperanza de cuadrado medio para Factor B DCA

$$
\begin{aligned}
E(Y_{\cdot\cdot j}) &= E(\sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{a} Y_{kij}) \\
&= \sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{a} E(Y_{kij}) \\
&= \sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{a} \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} \\
&= ar\mu + r\sum_{i=1}^{a}\alpha_i + ar\beta_j + c\sum_{i=1}^{a}(\alpha\beta)_{ij}
\end{aligned}
$$

Por las restricciones eliminamos α_i y $(\alpha\beta)_{ij}$

$$
E(Y_{\cdot i\cdot}) = ar(\mu + \beta_j)
$$

$$
\begin{aligned}
V(Y_{\cdot\cdot j}) &= V(\sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{a} Y_{ijk}) \\
&= V(\gamma_{k(i)} + \epsilon_{kij}) \\
&= V(\sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{a}\gamma_{k(i)} + \sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{a}\epsilon_{kij}) \\
&= ar\sigma_w^2 + ar\sigma^2
\end{aligned}
$$

La esperanza de $\frac{\sum_{j=1}^{b} Y_{\cdot\cdot j}^2}{ar}$ sería

$$\begin{aligned}
\frac{\sum_{j=1}^{b} E(Y_{\cdot\cdot j}^2)}{ar} &= \frac{\sum_{j=1}^{b}[ar(\mu+\beta_j)^2]+ar\sigma_w^2+ar\sigma^2}{ar} \\
&= \frac{b(ar)^2\mu^2+(ar)^2\sum_{j=1}^{b}\beta_j^2+abr\sigma_w^2+abr\sigma^2}{ar} \\
&= abr\mu^2+ar\sum_{j=1}^{b}\beta_j^2+b\sigma_w^2+b\sigma^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(SC_B) = E&\left(\frac{\sum_{j=1}^{b} Y_{\cdot\cdot j}^2}{ar}-\frac{Y_{\cdots}^2}{abr}\right) \\
&= abr\mu^2+ar\sum_{j=1}^{b}\beta_j^2+b\sigma_w^2+b\sigma^2 \\
&- abr\mu^2-b\sigma_w^2-\sigma^2 \\
&= ar\sum_{j=1}^{b}\beta_j^2+\sigma^2(b-1)
\end{aligned}$$

Con esperanza de cuadrado medio

$$\begin{aligned}
E(CM_B) &= \frac{ar\sum_{j=1}^{b}\beta_j^2+\sigma^2(b-1)}{b-1} \\
&= ar\frac{\sum_{j=1}^{b}\beta_j^2}{b-1}+\sigma^2
\end{aligned}$$

A.4. Esperanza del cuadrado medio de la interacción AxB DBCA

$$\begin{aligned}
E(Y_{\cdot ij}) &= E(\sum_{k=1}^{r} Y_{kij}) \\
&= \sum_{k=1}^{r} E(Y_{kij}) \\
&= \sum_{k=1}^{r} \mu+\alpha_i+\beta_j+(\alpha\beta)_{ij} \\
&= r\mu+r\alpha_i+r\beta_j+r(\alpha\beta)_{ij} \qquad = r(\mu+\alpha_i+\beta_j+(\alpha\beta)_{ij})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
V(Y_{\cdot ij}) &= V(\sum_{k=1}^{r} Y_{ijk}) \\
&= V(\gamma_{k(i)} + \epsilon_{kij}) \\
&= V(\sum_{k=1}^{r} \gamma_{k(i)} + \sum_{k=1}^{r} \epsilon_{kij}) \\
&= r(\sigma_\tau^2 + \sigma_w^2 + \sigma^2)
\end{aligned}
$$

La esperanza de $\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} Y_{\cdot ij}^2$ es

$$
\begin{aligned}
E(\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} Y_{\cdot ij}^2) &= \frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} r^2(\mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij})^2 + r(\sigma_w^2 + \sigma^2)}{r} \\
&= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} r(\mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij})^2 + \sigma_w^2 + \sigma^2 \\
&= abr\mu^2 + br\sum_{i} \alpha_i^2 + ar\sum_{j=1}^{b} \beta_j^2 + r\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} (\alpha\beta)_{ij}^2 + ab\sigma_w^2 + ab\sigma^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(SC_{AB}) &= E\left(\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} Y_{\cdot ij}^2 - \frac{Y_{\cdots}^2}{abr} - SC_A - SC_B\right) \\
&= abr\mu^2 + br\sum_{i} \alpha_i^2 + ar\sum_{j=1}^{b} \beta_j^2 + r\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} (\alpha\beta)_{ij}^2 + ab\sigma_w^2 + ab\sigma^2 \\
&- abr\mu^2 - b\sigma_w^2 - \sigma^2 \\
&- br\sum_{i=1}^{a} \alpha_i^2 - ab\sigma_w^2 - a\sigma^2 + b\sigma_w^2 + \sigma^2 \\
&- ar\sum_{j=1}^{b} \beta_j^2 - b\sigma^2 + \sigma^2 \\
&= r\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} (\alpha\beta)_{ij}^2 + ab\sigma^2 - a\sigma^2 - b\sigma^2 + \sigma^2 \\
&= r\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} (\alpha\beta)_{ij}^2 + (a-1)(b-1)\sigma^2
\end{aligned}
$$

Con esperanza de cuadrado medio

$$\begin{aligned}
E(CM_{AB}) &= \frac{1}{(a-1)(b-1)}(r\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\alpha\beta)_{ij}^2 + (a-1)(b-1)\sigma^2) \\
&= r\frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\alpha\beta)_{ij}^2}{(a-1)(b-1)} + \sigma^2
\end{aligned}$$

A.5. Esperanza de cuadrado medio del error de subparcela DCA

Si consideramos que

$$\epsilon_{kij} = Y_{kij} - \mu - \alpha_i - \beta_j - (\alpha\beta)_{ij} - \gamma_{k(i)}$$

Podemos obtener el error estimado al cuadrado reemplazando los parámetros por sus estimadores

$$\begin{aligned}
\hat{\epsilon}_{kij}^2 &= [Y_{kij} - \bar{Y}_{...} - (\bar{Y}_{.i.} - \bar{Y}_{...}) - (\bar{Y}_{..j} - \bar{Y}_{...}) \\
&- (\bar{Y}_{.ij} - \bar{Y}_{.i.} - \bar{Y}_{..j} + \bar{Y}_{...}) \\
&- (\bar{Y}_{ki.} - \bar{Y}_{.i.} - \bar{Y}_{k..} + \bar{Y}_{...})]^2 \\
&= (Y_{kij} - \bar{Y}_{.ij} - \bar{Y}_{ki.} + \bar{Y}_{.i.})^2
\end{aligned}$$

La sumatoria de cuadrados para el error adopta la forma

$$SC_E = \sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} Y_{kij}^2 - \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} Y_{.ij}^2 - \frac{1}{b}\sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{r} Y_{ki.}^2 + \frac{1}{br}\sum_{i=1}^{a} Y_{.i.}^2 \quad (6)$$

La esperanza de $\sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} Y_{kij}^2$ se puede resolver rápidamente considerando que todas las sumatorias de los efectos fijos entre sí serán cero, por las condiciones sobre las sumatorias, al igual que las de los efectos aleatorios entre sí,porque al ser variables independientes entre sí, la multiplicación de sus esperanzas da 0.

$$\begin{aligned}
E(\sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} Y_{kij}^2) &= E(\sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} \mu^2 + \alpha_i^2 + \beta_j^2 + (\alpha\beta)_{ij}^2 + \gamma_{k(i)}^2 + \epsilon_{kij}^2) \\
&= abr\mu + br\sum_{i=1}^{a}\alpha_i^2 + ar\sum_{j=1}^{b}\beta_j^2 + r\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\alpha\beta)_{ij} + abr\sigma_w^2 + abr\sigma^2
\end{aligned}$$

Reemplazando en (6) con la expresión anterior y las esperanzas de los sumatorias de la respuesta al cuadrado

$$
\begin{aligned}
E(SC_E) = {} & abr\mu + br\sum_{i=1}^{a}\alpha_i^2 + ar\sum_{j=1}^{b}\beta_j^2 + r\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\alpha\beta)_{ij} + abr\sigma_w^2 + abr\sigma^2 \\
& - (abr\mu^2 + br\sum_{i}\alpha_i^2 + ar\sum_{j=1}^{b}\beta_j^2 + r\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\alpha\beta)_{ij}^2 + ab\sigma_w^2 + ab\sigma^2) \\
& - (abr\mu^2 + br\sum_{i=1}^{a}\alpha_i^2 + abr\sigma_w^2 + ar\sigma^2) \\
& - (abr\mu^2 + br\sum_{i=1}^{a}\alpha_i^2 + ab\sigma_w^2 + a\sigma^2) \\
& = abr\sigma^2 - ab\sigma^2 - ar\sigma^2 + a\sigma^2 \\
& = a\sigma^2(b-1)(r-1)
\end{aligned}
$$

Con esperanza de cuadrado medio

$$
\begin{aligned}
E(CM_E) &= \frac{a\sigma^2(b-1)(r-1)}{a(b-1)(r-1)} \\
&= \sigma^2
\end{aligned}
$$

B. Cálculo de esperanza de cuadrados medios de los efectos aleatorios y fijos para diseños de parcela dividida DBCA

Consideremos las siguientes sumas de cuadrados como base, presentados en el texto

$$
\begin{aligned}
SC_A &= \frac{\sum_{i=1}^{a} Y_{\cdot i\cdot}^2}{br} - \frac{Y_{\cdots}^2}{abr} \\
SC_B &= \frac{\sum_{j=1}^{b} Y_{\cdot\cdot j}^2}{ar} - \frac{Y_{\cdots}^2}{abr} \\
SC_{AB} &= \frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} Y_{\cdot ij}^2}{r} - \frac{Y_{\cdots}^2}{abr} - SC_A - SC_B \\
SC_{BLOQUE} &= \frac{\sum_{k=1}^{r} Y_{k\cdot\cdot}^2}{ab} - \frac{Y_{\cdots}^2}{abr} \\
SC_{EP} &= \frac{\sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{a} Y_{ki\cdot}^2}{b} - \frac{Y_{\cdots}^2}{abr} - SC_A - SC_{BLOQUE}
\end{aligned}
$$

Para facilitar la notación de los cuadrados medios, se suele hacer $V(\gamma_{k(i)}) = \frac{a-1}{a}\sigma_w^2$. En aquellos casos donde este presente en el cuadrado medio σ_w^2, representaremos el cuadrado medio en bruto para el factor X con CMB_X, en tanto que el convencional se representará como CM_X

Se deben calcular las esperanzas y varianzas de $Y_{...}$, $Y_{.i.}$, $Y_{..j}$ y $Y_{.ij}$ para calcular las esperanzas de sus cuadrados y, así, calcular las esperanzas de sus cuadrados medios.

$$
\begin{aligned}
E(Y_{...}) &= E(\sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} Y_{ijk}) \\
&= \sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} E(Y_{ijk}) \\
&= \sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} \\
&= rab\mu + rb\sum_{i=1}^{a}\alpha_i + ra\sum_{j=1}^{b}\beta_j + c\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\alpha\beta)_{ij}
\end{aligned}
$$

Por las condiciones del modelo, se eliminan las sumatorias de α_i, β_j y $(\alpha\beta)_i j$

$$E(Y_{...}) = abr\mu$$

$$
\begin{aligned}
V(Y_{...}) &= V(\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{a} Y_{kij}) \\
&= V(\sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} \tau_k + \gamma_{k(i)} + \epsilon_{kij})
\end{aligned}
$$

Por las restricciones, eliminamos el término $\gamma_{k(i)}$

$$
\begin{aligned}
V(Y_{...}) &= (ab)^2\sum_{k=1}^{r} V(\tau_k) + \sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} V(\epsilon_{kij}) \\
&= (ab)^2 r\sigma_\tau^2 + abr\sigma^2
\end{aligned}
$$

El término $\frac{E(Y_{...}^2)}{abr}$ quedaría

$$
\begin{aligned}
\frac{E(Y_{...}^2)}{abr} &= \frac{(abr\mu)^2 + (ab)^2 r\sigma_\tau^2 + abr\sigma^2}{abr} \\
&= abr\mu^2 + ab\sigma_\tau^2 + \sigma^2
\end{aligned}
$$

B.1. Esperanza de cuadrado medio para Factor A DBCA

$$
\begin{aligned}
E(Y_{\cdot i \cdot}) &= E(\sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{b} Y_{kij}) \\
&= \sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{b} E(Y_{kij}) \\
&= \sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{b} \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} \\
&= rb\mu + rb\alpha_i + r\sum_{j=1}^{b}\beta_j + r\sum_{j=1}^{b}(\alpha\beta)_{ij}
\end{aligned}
$$

Por las restricciones eliminamos β_j y $(\alpha\beta)_{ij}$

$$E(Y_{\cdot i \cdot}) = br(\mu + \alpha_i)$$

$$
\begin{aligned}
V(Y_{\cdot i \cdot}) &= V(\sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{b} Y_{ijk}) \\
&= V(\sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{b} \tau_k + \gamma_{k(i)} + \epsilon_{kij}) \\
&= V(b\sum_{k=1}^{r}\tau_k + b\sum_{k=1}^{r}\gamma_{k(i)} + \sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{b}\epsilon_{kij}) \\
&= b^2 r\sigma_\tau^2 + b^2 r\sigma_w^2 + br\sigma^2
\end{aligned}
$$

La esperanza de $\frac{\sum_{i=1}^{a} Y_{\cdot i \cdot}^2}{br}$ sería

$$
\begin{aligned}
\frac{\sum_{i=1}^{a} E(Y_{\cdot i \cdot}^2)}{br} &= \frac{\sum_{i=1}^{a}[br(\mu+\alpha_i)^2] + b^2 r\sigma_\tau^2 + b^2 r\sigma_w^2 + bc\sigma^2}{br} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{a}(br)^2\mu^2 + 2(br)^2\mu\alpha + (br)^2\alpha_i^2 + b^2 r\sigma_\tau^2 + b^2 r\sigma_w^2 + br\sigma^2}{br} \\
&= abr\mu^2 + br\sum_{i=1}^{a}\alpha_i^2 + ab\sigma_\tau^2 + ab\sigma_w^2 + a\sigma^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(SC_A) &= E\left(\frac{\sum_{i=1}^{a} Y_{\cdot i \cdot}^2}{br} - \frac{Y_{\cdots}^2}{abr}\right) \\
&= \\
&= abr\mu^2 + br\sum_{i=1}^{a}\alpha_i^2 + ab\sigma_\tau^2 + ab\sigma_w^2 + a\sigma^2 \\
&- abr\mu^2 - ab\sigma_\tau^2 - \sigma^2 \\
&= br\sum_{i=1}^{a}\alpha_i^2 + ab\sigma_w^2 + \sigma^2(a-1)
\end{aligned}
$$

Con esperanza de cuadrado medio en bruto y convencional

$$
\begin{aligned}
E(CMB_A) &= \frac{br\sum_{i=1}^{a}\alpha_i^2 + ab\sigma_w^2 + \sigma^2(a-1)}{a-1} \\
&= \frac{br\sum_{i=1}^{a}\alpha_i^2 + ab\sigma_w^2}{a-1} + \sigma^2 \\
E(CM_A) &= br\frac{\sum_{i=1}^{a}\alpha_i^2}{a-1} + b\sigma_w^2 + \sigma^2
\end{aligned}
$$

B.2. Esperanza de cuadrado medio para Factor B DBCA

$$
\begin{aligned}
E(Y_{\cdot\cdot j}) &= E(\sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{a} Y_{kij}) \\
&= \sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{a} E(Y_{kij}) \\
&= \sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{a} \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} \\
&= ar\mu + r\sum_{i=1}^{a}\alpha_i + ar\beta_j + c\sum_{i=1}^{a}(\alpha\beta)_{ij}
\end{aligned}
$$

Por las restricciones eliminamos α_i y $(\alpha\beta)_{ij}$

$$
E(Y_{\cdot i \cdot}) = ar(\mu + \beta_j)
$$

$$
\begin{aligned}
V(Y_{\cdot\cdot j}) &= V(\sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{a} Y_{ijk}) \\
&= V(\sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{a} \tau_k + \gamma_{k(i)} + \epsilon_{kij}) \\
&= V(a\sum_{k=1}^{r}\tau_k + \sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{a}\gamma_{k(i)} + \sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{a}\epsilon_{kij})
\end{aligned}
$$

Por restricción del modelo eliminamos $\gamma_{k(i)}$

$$V(Y_{\cdot\cdot j}) = a^2 r\sigma_\tau^2 + ar\sigma^2$$

La esperanza de $\frac{\sum_{j=1}^{b} Y_{\cdot\cdot j}^2}{ar}$ sería

$$
\begin{aligned}
\frac{\sum_{j=1}^{b} E(Y_{\cdot\cdot j}^2)}{ar} &= \frac{\sum_{j=1}^{b}[ar(\mu+\beta_j)^2] + a^2 r\sigma_\tau^2 + ar\sigma^2}{ar} \\
&= \frac{b(ar)^2\mu^2 + (ar)^2\sum_{j=1}^{b}\beta_j^2 + a^2 br\sigma_\tau^2 + abr\sigma^2}{ar} \\
&= abr\mu^2 + ar\sum_{j=1}^{b}\beta_j^2 + ab\sigma_\tau^2 + b\sigma^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(SC_B) &= E\left(\frac{\sum_{j=1}^{b} Y_{\cdot\cdot j}^2}{ar} - \frac{Y_{\cdots}^2}{abr}\right) \\
&= abr\mu^2 + ar\sum_{j=1}^{b}\beta_j^2 + ab\sigma_\tau^2 + b\sigma^2 \\
&- abr\mu^2 - ab\sigma_\tau^2 - \sigma^2 \\
&= ar\sum_{j=1}^{b}\beta_j^2 + \sigma^2(b-1)
\end{aligned}
$$

Con esperanza de cuadrado medio

$$
\begin{aligned}
E(CM_B) &= \frac{ar\sum_{j=1}^{b}\beta_j^2 + \sigma^2(b-1)}{b-1} \\
&= ar\frac{\sum_{j=1}^{b}\beta_j^2}{b-1} + \sigma^2
\end{aligned}
$$

B.3. Esperanza de cuadrado medio para efecto del bloque

$$
\begin{aligned}
E(Y_{k\cdot\cdot}) &= E(\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} Y_{kij}) \\
&= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} E(Y_{ijk}) \\
&= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} \\
&= ab\mu + b\sum_{i=1}^{a}\alpha_i + a\sum_{j=1}^{b}\beta_j + \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\alpha\beta)_{ij}
\end{aligned}
$$

Por las restricciones eliminamos α_i,β_j y $(\alpha\beta)_{ij}$

$$E(Y_{k\cdot\cdot}) = ab\mu$$

$$
\begin{aligned}
V(Y_{k\cdot\cdot}) &= V(\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} Y_{kij}) \\
&= V(\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} \tau_k + \gamma_{k(i)} + \epsilon_{kij}) \\
&= V(ab\tau_k + b\sum_{i=1}^{a}\gamma_{k(i)} + \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\epsilon_{kij})
\end{aligned}
$$

Por restricción del modelo eliminamos $\gamma_{k(i)}$

$$V(Y_{k\cdot\cdot}) = (ab)^2\sigma_\tau^2 + ab\sigma^2$$

La esperanza de $\frac{\sum_{k=1}^{r} Y_{k\cdot\cdot}^2}{ab}$ sería

$$
\begin{aligned}
\frac{\sum_{j=1}^{b} E(Y_{k\cdot\cdot}^2)}{ab} &= \frac{\sum_{k=1}^{r}[(ab\mu)^2 + (ab)^2\sigma_\tau^2 + ab\sigma^2}{ab} \\
&= abr\mu^2 + abr\sigma_\tau^2 + r\sigma^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(SC_{BLOQUE}) &= E\left(\frac{\sum_{k=1}^{r} Y_{k\cdot\cdot}^2}{ab} - \frac{Y_{\cdots}^2}{abr}\right) \\
&= abr\mu^2 + abr\sigma_\tau^2 + \sigma^2 - abr\mu^2 - ab\sigma_\tau^2 - \sigma^2 \\
&= (r-1)(ab\sigma_\tau^2 + \sigma^2)
\end{aligned}
$$

Con esperanza de cuadrado medio

$$\begin{aligned} E(CM_{BLOQUE}) &= \frac{(r-1)(ab\sigma_\tau^2 + \sigma^2)}{r-1} \\ &= ab\sigma_\tau^2 + \sigma^2 \end{aligned}$$

B.4. Esperanza del cuadrado medio de la interacción AxB DBCA

$$\begin{aligned} E(Y_{\cdot ij}) &= E(\sum_{k=1}^{r} Y_{kij}) \\ &= \sum_{k=1}^{r} E(Y_{kij}) \\ &= \sum_{k=1}^{r} \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} \\ &= r\mu + r\alpha_i + r\beta_j + r(\alpha\beta)_{ij} \qquad = r(\mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(Y_{\cdot ij}) &= V(\sum_{k=1}^{r} Y_{ijk}) \\ &= V(\sum_{k=1}^{r} \tau_k + \gamma_{k(i)} + \epsilon_{kij}) \\ &= V(\sum_{k=1}^{r} \tau_k + \sum_{k=1}^{r} \gamma_{k(i)} + \sum_{k=1}^{r} \epsilon_{kij}) \\ &= r(\sigma_\tau^2 + \sigma_w^2 + \sigma^2) \end{aligned}$$

La esperanza de $\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} Y_{\cdot ij}^2$ es

$$\begin{aligned} E(\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} Y_{\cdot ij}^2) &= \frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} r^2(\mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij})^2 + r(\sigma_\tau^2 + \sigma_w^2 + \sigma^2)}{r} \\ &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} r(\mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij})^2 + \sigma_\tau^2 + \sigma_w^2 + \sigma^2 \\ &= abr\mu^2 + br\sum_{i}\alpha_i^2 + ar\sum_{j=1}^{b}\beta_j^2 + r\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\alpha\beta)_{ij}^2 + ab\sigma_\tau^2 + ab\sigma_w^2 + ab\sigma^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
E(SC_{AB}) &= E\left(\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}Y_{\cdot ij}^2 - \frac{Y_{\cdots}^2}{abr} - SC_A - SC_B\right)\\
&= abr\mu^2 + br\sum_{i}\alpha_i^2 + ar\sum_{j=1}^{b}\beta_j^2 + r\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\alpha\beta)_{ij}^2 + ab\sigma_\tau^2 + ab\sigma_w^2 + ab\sigma^2\\
&- abr\mu^2 - ab\sigma_\tau^2 - \sigma^2\\
&- br\sum_{i=1}^{a}\alpha_i^2 - ab\sigma_w^2 - a\sigma^2 + \sigma^2\\
&- ar\sum_{j=1}^{b}\beta_j^2 - b\sigma^2 + \sigma^2\\
&= r\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\alpha\beta)_{ij}^2 + (a-1)(b-1)\sigma^2
\end{aligned}
$$

Con esperanza de cuadrado medio

$$
\begin{aligned}
E(CM_{AB}) &= \frac{1}{(a-1)(b-1)}(r\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\alpha\beta)_{ij}^2 + (a-1)(b-1)\sigma^2)\\
&= r\frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\alpha\beta)_{ij}^2}{(a-1)(b-1)} + \sigma^2
\end{aligned}
$$

B.5. Esperanza del cuadrado medio del error de parcela completa DBCA

$$
\begin{aligned}
E(Y_{ki\cdot}) &= E(\sum_{j=1}^{b}Y_{kij})\\
&= \sum_{j=1}^{b}E(Y_{kij})\\
&= \sum_{j=1}^{b}\mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij}\\
&= b\mu + b\alpha_i + \sum_{j=1}^{b}\beta_j + \sum_{j=1}^{b}(\alpha\beta)_{ij}
\end{aligned}
$$

Por condición del modelo eliminamos los términos β_j y $(\alpha\beta)_{ij}$

$$E(Y_{ki\cdot}) = b(\mu + \alpha_i)$$

$$
\begin{aligned}
V(Y_{ki\cdot}) &= V(\sum_{j=1}^{b} Y_{ijk}) \\
&= V(\sum_{j=1}^{b} \tau_k + \gamma_{k(i)} + \epsilon_{kij}) \\
&= V(b\tau_k + b\gamma_{k(i)} + \sum_{j=1}^{b} \epsilon_{kij}) \\
&= b^2\sigma_\tau^2 + b^2\sigma_w^2 + b\sigma^2
\end{aligned}
$$

La esperanza de $\frac{1}{b}\sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{a} Y_{ki\cdot}^2$ es

$$
\begin{aligned}
E(\frac{1}{b}\sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{a} Y_{ki\cdot}^2) &= \frac{\sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{a} b^2(\mu+\alpha_i)^2 + b^2\sigma_\tau^2 + b^2\sigma_w^2 + b\sigma^2}{b} \\
&= \sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{a} b(\mu+\alpha_i)^2 + b\sigma_\tau^2 + b\sigma_w^2 + \sigma^2 \\
&= abr\mu^2 + br\sum_{i=1}^{a}\alpha_i^2 + abr\sigma_\tau^2 + abr\sigma_w^2 + ar\sigma^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(SC_{EP}) &= E\left(\frac{1}{b}\sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{a} Y_{ki\cdot}^2 - \frac{Y_{\cdots}^2}{abr} - SC_A - SC_{BLOQUE}\right) \\
&= abr\mu^2 + br\sum_{i=1}^{a}\alpha_i^2 + abr\sigma_\tau^2 + abr\sigma_w^2 + ar\sigma^2 \\
&- abr\mu^2 - ab\sigma_\tau^2 - \sigma^2 \\
&- br\sum_{i=1}^{a}\alpha_i^2 - ab\sigma_w^2 - a\sigma^2 + \sigma^2 \\
&- abr\sigma_\tau^2 - r\sigma^2 + ab\sigma_\tau^2 + \sigma^2 \\
&= ab\sigma_w^2(r-1) + (a-1)(r-1)\sigma^2
\end{aligned}
$$

Con esperanza de cuadrado medio

$$
\begin{aligned}
E(CMB_{EP}) &= \frac{1}{(a-1)(r-1)} ab\sigma_w^2(r-1) + (a-1)(r-1)\sigma^2 \\
&= \frac{ab\sigma_w^2}{a-1} + \sigma^2 \\
E(CM_{EP}) &= b\sigma_w^2 + \sigma^2
\end{aligned}
$$

B.6. Esperanza de cuadrado medio del error de subparcela DBCA

Si consideramos que

$$\epsilon_{kij} = Y_{kij} - \mu - \alpha_i - \beta_j - (\alpha\beta)_{ij} - \gamma_{k(i)} - \tau_k$$

Podemos obtener el error estimado al cuadrado reemplazando los parámetros por sus estimadores

$$\begin{aligned}\hat{\epsilon}^2_{kij} &= [Y_{kij} - \bar{Y}_{...} - (\bar{Y}_{\cdot i\cdot} - \bar{Y}_{...}) - (\bar{Y}_{\cdot\cdot j} - \bar{Y}_{...}) \\ &- (\bar{Y}_{\cdot ij} - \bar{Y}_{\cdot i\cdot} - \bar{Y}_{\cdot\cdot j} + \bar{Y}_{...}) \\ &- (\bar{Y}_{ki\cdot} - \bar{Y}_{\cdot i\cdot} - \bar{Y}_{k\cdot\cdot} + \bar{Y}_{...}) \\ &- (\bar{Y}_{k\cdot\cdot} - \bar{Y}_{...})]^2 \\ &= (Y_{kij} - \bar{Y}_{\cdot ij} - \bar{Y}_{ki\cdot} + \bar{Y}_{\cdot i\cdot})^2\end{aligned}$$

La sumatoria de cuadrados para el error adopta la forma

$$SC_E = \sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} Y^2_{kij} - \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} Y^2_{\cdot ij} - \frac{1}{b}\sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{r} Y^2_{ki\cdot} + \frac{1}{br}\sum_{i=1}^{a} Y^2_{\cdot i\cdot} \tag{7}$$

La esperanza de $\sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} Y^2_{kij}$ se puede resolver rápidamente considerando que todas las sumatorias de los efectos fijos entre sí serán cero, por las condiciones sobre las sumatorias, al igual que las de los efectos aleatorios entre sí,porque al ser variables independientes entre sí, la multiplicación de sus esperanzas da 0.

$$\begin{aligned}E(\sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} Y^2_{kij}) &= E(\sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} \mu^2 + \alpha_i^2 + \beta_j^2 + (\alpha\beta)^2_{ij} + \tau_k^2 + \gamma^2_{k(i)} + \epsilon^2_{kij}) \\ &= abr\mu + br\sum_{i=1}^{a}\alpha_i^2 + ar\sum_{j=1}^{b}\beta_j^2 + r\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\alpha\beta)_{ij} + abr\sigma^2_\tau + abr\sigma^2_w + abr\sigma^2\end{aligned}$$

Reemplazando en (7) con la expresión anterior y las esperanzas de las sumas de cuadrados

$$
\begin{aligned}
E(SC_E) &= abr\mu + br\sum_{i=1}^{a}\alpha_i^2 + ar\sum_{j=1}^{b}\beta_j^2 + r\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\alpha\beta)_{ij} + abr\sigma_\tau^2 + abr\sigma_w^2 + abr\sigma^2 \\
&- (abr\mu^2 + br\sum_{i}\alpha_i^2 + ar\sum_{j=1}^{b}\beta_j^2 + r\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\alpha\beta)_{ij}^2 + ab\sigma_\tau^2 + ab\sigma_w^2 + ab\sigma^2) \\
&- (abr\mu^2 + br\sum_{i=1}^{a}\alpha_i^2 + abr\sigma_\tau^2 + abr\sigma_w^2 + ar\sigma^2) \\
&- (abr\mu^2 + br\sum_{i=1}^{a}\alpha_i^2 + ab\sigma_\tau^2 + ab\sigma_w^2 + a\sigma^2) \\
&= abr\sigma^2 - ab\sigma^2 - ar\sigma^2 + a\sigma^2 \\
&= a\sigma^2(b-1)(r-1)
\end{aligned}
$$

Con esperanza de cuadrado medio

$$
\begin{aligned}
E(CM_E) &= \frac{a\sigma^2(b-1)(r-1)}{a(b-1)(r-1)} \\
&= \sigma^2
\end{aligned}
$$